# Difficoltà nell'apprendimento della matematica

## Ostacoli

**Bruno D'Amore - Martha Isabel Fandiño Pinilla**

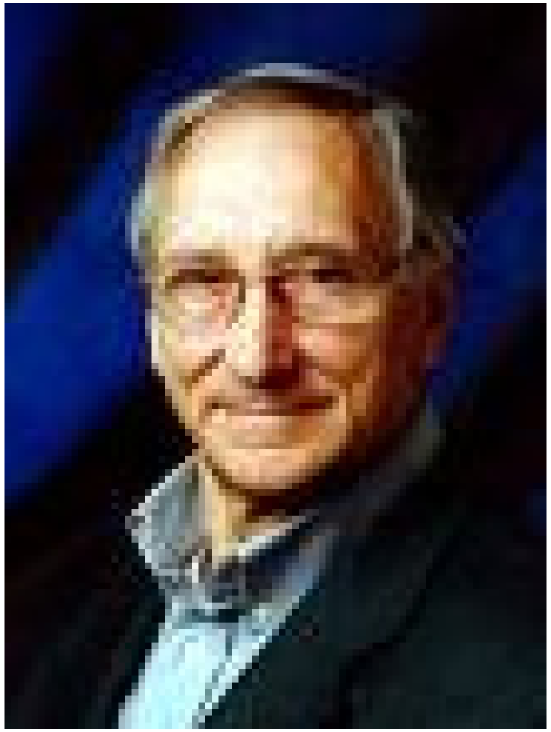
**NRD - Dipartimento di Matematica – Università di Bologna - Italia**
**Università di Bolzano - Italia**
**Alta Scuola Pedagogica di Locarno – Svizzera**
**Mescud – Universidad de Bogotá - Colombia**

**www.dm.unibo.it/rsddm**

# Ostacoli all’apprendimento della matematica

## 1. La teoria degli ostacoli

Una vera e propria *teoria degli ostacoli* che si frappongono all’apprendimento della matematica fu proposta una prima volta da Guy Brousseau nel 1976 e sistemata in modo definitivo negli anni successivi.



Guy Brousseau, medaglia Felix Klein 2003

Nello stesso processo di insegnamento-apprendimento, da una parte è bene che si formino idee transitorie, ma dall'altro bisogna fare i conti con il fatto che tali idee resisteranno (tenteranno di resistere) poi al tentativo di superarle. Le rotture sono necessarie. Ma vi sono allora dei fenomeni evidenti di resistenza all'apprendimento, che occorre esaminare, gli *ostacoli*.

Si usa dire in che un ostacolo è un'idea che, al momento della formazione di un concetto, è stata efficace per affrontare dei problemi precedenti, ma che si rivela fallimentare quando si tenta di applicarla ad un problema nuovo. Visto il successo ottenuto (anzi: a maggior ragione a causa di questo), si tende a conservare l'idea già acquisita e comprovata e, nonostante il fallimento, si cerca di salvarla; ma questo fatto finisce con l'essere una barriera verso successivi apprendimenti.

Tuttavia questa “definizione”, se ben si adatta ad alcune tipologie di ostacoli, non calza a pennello ad altri; molto più semplicemente, allora, si potrebbe dire che ostacolo è sinonimo di qualche cosa che si frappone all’apprendimento trasmissivo insegnante-allievo atteso, qualunque ne sia la natura

Prima di procedere, un esempio.
Nell'insieme N dei numeri naturali (0, 1, 2, 3, 4, 5, …), ogni elemento generico *n* ha un ben determinato successivo *n*+1; questo concetto viene conquistato in maniera implicita e naturale, senza bisogno di insegnamenti espliciti, fin dalla più tenera età; è implicito nella conta dei numeri naturali che i bambini costruiscono in modo quasi automatico fra i 2 ed i 4 anni. Ma l'oggetto matematico "successivo di un numero dato" viene reso esplicito e reso oggetto di apprendimento nella scuola primaria, attorno ai 6 anni di età, e facilmente costruito. Esso si forma, diventa conoscenza corretta e spendibile in aula; ma assume spesso la forma seguente: *ogni* numero (di non importa qual insieme numerico) ha un successivo.

Quando si giunge a Q (insieme dei razionali), il che capita più o meno in terza primaria quando si incontrano le prime frazioni o i primi numeri scritti nella forma con la virgola, l'idea di successivo persiste, è una conoscenza precedente che ha avuto successo, ma qui invece dovrebbe perdere di significato. Infatti: non esiste il successivo di $\frac{3}{4}$ e non $\frac{4}{5}$ è come si sente dire o come si legge perfino su certi libri di testo, perché tra $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$ vi sono altre infinite frazioni, per esempio $\frac{35}{50}$. Così: non esiste il successivo di 1,4 e non è certo 1,5 come si sente dire o come si legge perfino su certi libri di testo, perché tra 1,4 e 1,5 ci sono altri infiniti numeri, per esempio 1,42.

Nella necessità didattica di superare tali ostacoli, si dovrebbero studiare occasioni didattiche strutturate appositamente per fornire agli allievi prove della necessità di modificare le loro concezioni.

Come abbiamo già detto, questa idea di Brousseau ha visto la luce attorno alla metà degli anni ‘70; egli fornisce (in quei primi lavori di ricerca ed in successivi) alcune caratteristiche degli ostacoli:

- bisogna sempre tener presente che, in generale, un ostacolo non è una mancanza di conoscenza, ma una conoscenza;
- l'allievo usa questa conoscenza per dare risposte adatte in un contesto noto, già incontrato;
- se l'allievo tenta di usare questa conoscenza fuori dal contesto noto, già incontrato, fallisce, generando risposte scorrette; ci si accorge allora che si necessita di punti di vista diversi;

- l’ostacolo produce contraddizioni, ma lo studente resiste a tali contraddizioni; sembra allora necessitare di una conoscenza più generale, maggiore, più approfondita, che generalizzi la situazione nota e risolta, e che comprenda la nuova nella quale si è fallito; bisogna che questo punto venga reso esplicito e che lo studente se ne renda conto;
- anche una volta superato, in modo sporadico l’ostacolo riappare lungo il corso del percorso cognitivo dell’allievo.

Come abbiamo già detto, però, questa caratterizzazione degli ostacoli non sempre si adatta a qualsiasi loro tipologia, quindi bisogna guardarla ed accettarla in modo critico.

Si usa distinguere in didattica della matematica tre tipi di ostacoli:

- di natura ontogenetica
- di natura didattica
- di natura epistemologica,

# 2. Ostacoli ontogenetici

Ogni soggetto che apprende sviluppa capacità e conoscenze adatte alla sua età mentale (che può essere diversa dall'età cronologica), dunque adatte a mezzi e scopi di quella età: rispetto alla costruzione di certi concetti, cioè all’appropriazione di certi oggetti matematici, queste capacità e conoscenze possono essere insufficienti e possono costituire quindi *ostacoli di natura ontogenetica*.

Per esempio, l’allievo potrebbe avere limitazioni neurofisiologiche anche solo dovute alla sua età cronologica. In realtà, si potrebbero categorizzare meglio gli ostacoli, con una ripartizione più fine.

*Ostacoli genetici* sono quelli legati al corredo cromosomico di un individuo, quello che fornisce a ciascuno vari comportamenti innati; questi comportamenti possono essere causa di ostacoli, a volte anche insuperabili; gli esempi sono numerosissimi e comprendono funzioni primarie, come gli istinti (per esempio l'istinto di sopravvivenza) e funzioni superiori, come la predisposizione alla comprensione ed all'uso della lingua materna; o problemi legati a deficit sensoriali; o altro.

*Ostacoli ontogenetici* propriamente detti sono più legati allo sviluppo dell'intelligenza, dei sensi e dei sistemi percettivi. Messe a parte le patologie, che qui non discutiamo, gli ostacoli in questo campo sono legati all'evoluzione individuale; se per esempio l'ostacolo è legato alla maturazione psichica individuale, allora tale ostacolo verrà rimosso dal superamento di quella fase, anche solo per motivi cronologici. Tale tipo di ostacoli può essere anche di durata limitata nel tempo.

In questo tipo di ostacoli, la ricerca in didattica della matematica può fare poco; altri sono i settori di studio che si sono dedicati a questa vasta problematica; noi qui la trascuriamo per mancanza di specificità.

# 3. Ostacoli didattici

Ogni docente sceglie un progetto, un curricolo, una metodologia, interpreta in modo personale la trasposizione didattica, secondo le sue convinzioni sia scientifiche sia didattiche; egli crede in quella scelta e la propone alla classe perché la pensa efficace; ma quel che è efficace effettivamente per qualche studente, non è detto che lo sia per altri. Per questi *altri*, la scelta di *quel* progetto si rivela un *ostacolo didattico*.

Sapere accademico

*TRASPOSIZIONE DIDATTICA*

sapere da insegnare

*INGEGNERIA DIDATTICA*

sapere insegnato

La scelta del contenuto rientra nella trasposizione didattica, la scelta della metodologia rientra nell’ingegneria. Sia l’una scelta che l’altra, sono scelte compiute dal docente, in base alle proprie convinzioni. Sia l’una che l’altra possono non essere efficaci per tutti gli studenti e rivelarsi dunque fallimentari per alcuni.

Per esempio, per motivi legati al fatto che la scuola dell’obbligo finiva piuttosto presto, un po’ in tutto il mondo si è deciso, molti anni fa, di insegnare i numeri razionali, nella loro forma di scrittura con la virgola, fin dalla scuola primaria, ed in un momento in cui il bambino sta ancora assimilando (e con grande sforzo) idee relative ai numeri naturali. Ciò comporta che, nella concezione del bambino, non ci sia una vera e propria possibilità di assimilare con successo i numeri espressi nella forma decimale; egli finisce con l’accomodarli insieme ai naturali in un unico modello generale di numero.

Grazie alla ricerca, sappiamo oggi che, per i bambini della primaria, i numeri decimali sono dei “naturali con la virgola”, come ha dimostrato lo stesso Brousseau. Oggi si sa che questa concezione è assai radicata e persiste talvolta fino all’università; essa costituisce un ostacolo didattico piuttosto diffuso alla comprensione dei numeri reali.

Nello stesso senso, i numeri interi (cosiddetti relativi, cioè dotati di segno) sono interpretati né più né meno che come “numeri naturali relativi”, cioè numeri naturali dotati di segni; uno studio del campo concettuale dei cosiddetti numeri naturali relativi si trova in Gonzáles Marí.

Un altro esempio: l’attività di misura dei segmenti e le usuali considerazioni a questo proposito sono state evidenziate come ostacoli didattici alla comprensione dell’equipotenza di segmenti considerati come insiemi di punti; così pure la scelta del docente di scuola primaria di far diventare modello (stabile) l’immagine (instabile) del segmento come filo di perle (i punti), si rivela ostacolo didattico al momento dell’introduzione della densità in Q e ancora più (quasi insormontabile) della continuità in R (Arrigo, D’Amore).

# 4. Ostacoli epistemologici

Ogni argomento a carattere matematico ha un suo proprio statuto epistemologico che dipende dalla storia della sua creazione da parte di un individuo, dalla sua evoluzione all'interno della comunità matematica, dalla sua accettazione critica nell'àmbito della matematica, dalle riserve che gli sono proprie, dal linguaggio in cui è espresso o che richiede per potersi esprimere.
Ciò comporta che vi siano oggetti della matematica la cui natura è tale da costituire ostacolo non solo nell'apprendimento ma anche, e prima ancora, nella sua accettazione nella comunità scientifica

Questo fatto è interessante perché permette di conoscere a priori quali, dei concetti matematici che si desiderano far costruire ai propri allievi nel corso di un percorso didattico, costituiranno ostacoli epistemologici all'apprendimento.
Detto in modo più esplicito: quando nella storia dell'evoluzione di un concetto si individua una non continuità, una frattura, cambi radicali di concezione, allora si suppone che quel concetto abbia al suo interno *ostacoli di carattere epistemologico* sia ad essere concepito, sia ad essere accettato dalla comunità dei matematici, sia ad essere appreso. Quest'ultimo punto si manifesta, per esempio, in errori ricorrenti e tipici di vari studenti, in diverse classi, stabili negli anni.

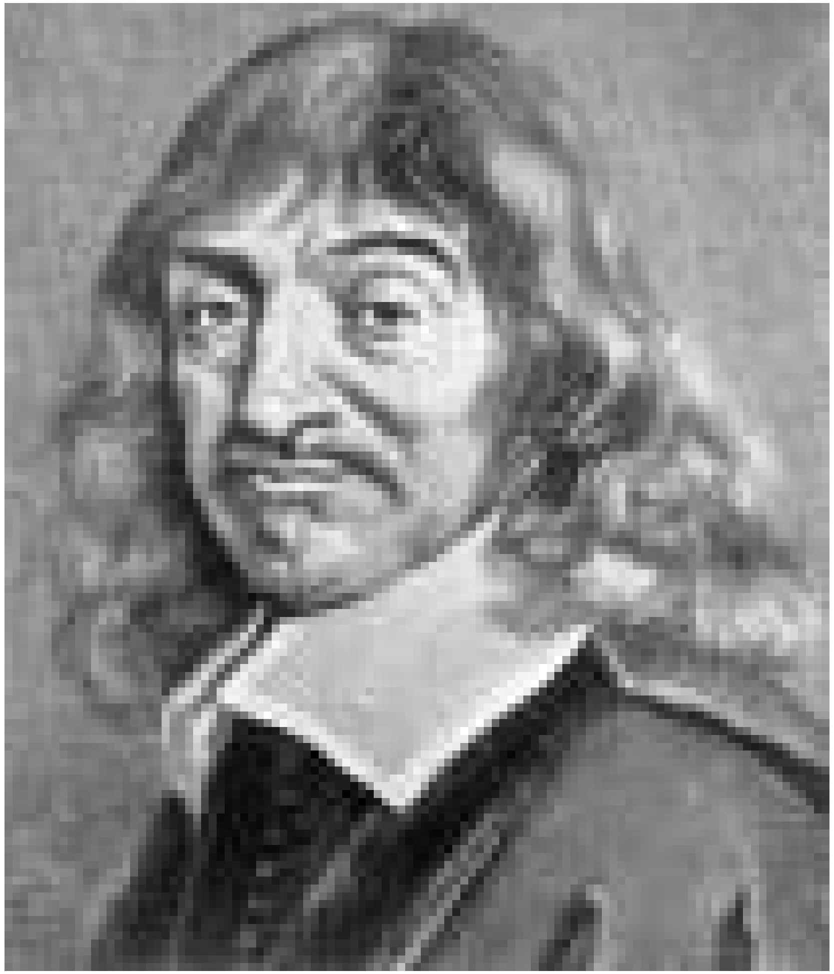
Abbiamo al giorno d’oggi moltissimi esempi di ostacoli epistemologici; per esempio quelli studiati da Cornu e Sierpinska [sull’apprendimento del concetto di limite; su questo si veda anche Bagni] e molti altri in svariati campi.

Un altro bell’esempio è costituito dallo studio specifico sul valor assoluto (Douroux; Gagatsis, Thomaidis).

Un altro successo nell'applicazione della teoria degli ostacoli epistemologici è stato ottenuto per quanto concerne i numeri interi relativi (Glaeser). In questa ricerca Glaeser mette molto dettagliatamente in evidenza una lista di ostacoli epistemologici scovati grazie ad un'analisi storica del concetto di numeri interi relativi. Molto interessante il fatto che egli trovi una stretta relazione tra gli ostacoli riscontrati negli studenti e le difficoltà incontrate da grandi matematici nel passato, proprio nel trattare di questo argomento: Diofanto, Stevin, Descartes, McLaurin, Euler, d'Alambert, Carnot, Laplace, Cauchy ed Hankel (che, in realtà, supera tutti gli ostacoli noti, proponendo una sistemazione fondazionale basata sulle classi di equivalenza).


Copertina di una delle opere più famose di Diofanto di Alessandria (200/214 – 284/298)

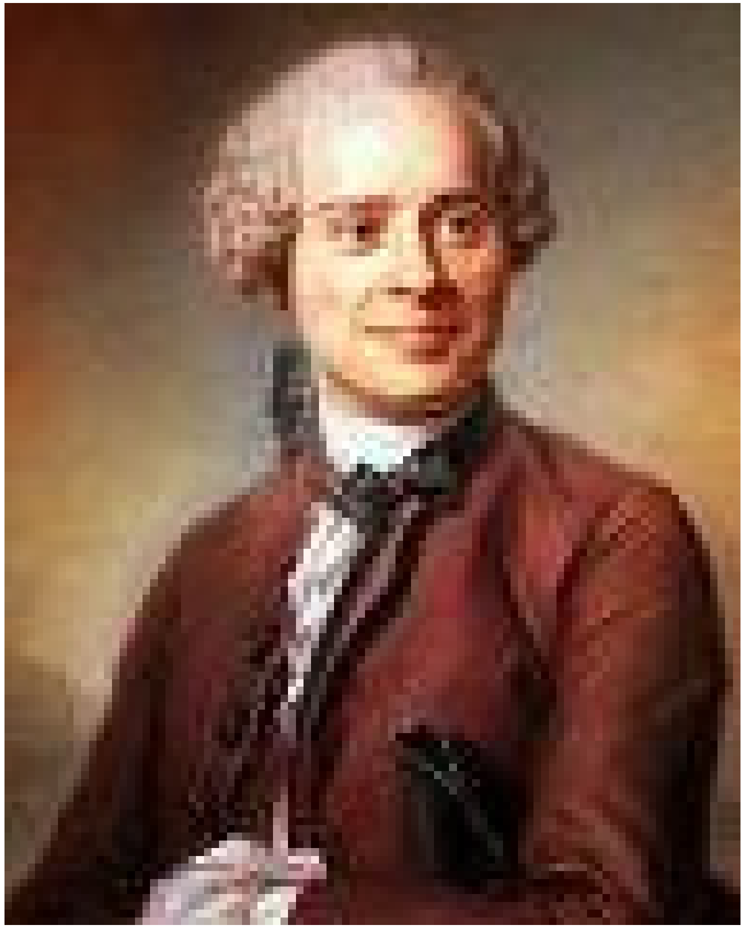
Simone Stevin (1548 – 1620)



René Descartes (1596 – 1650)

Colin Mc Laurin (1698 – 1746)

Leonhard Euler (1707 – 1783)

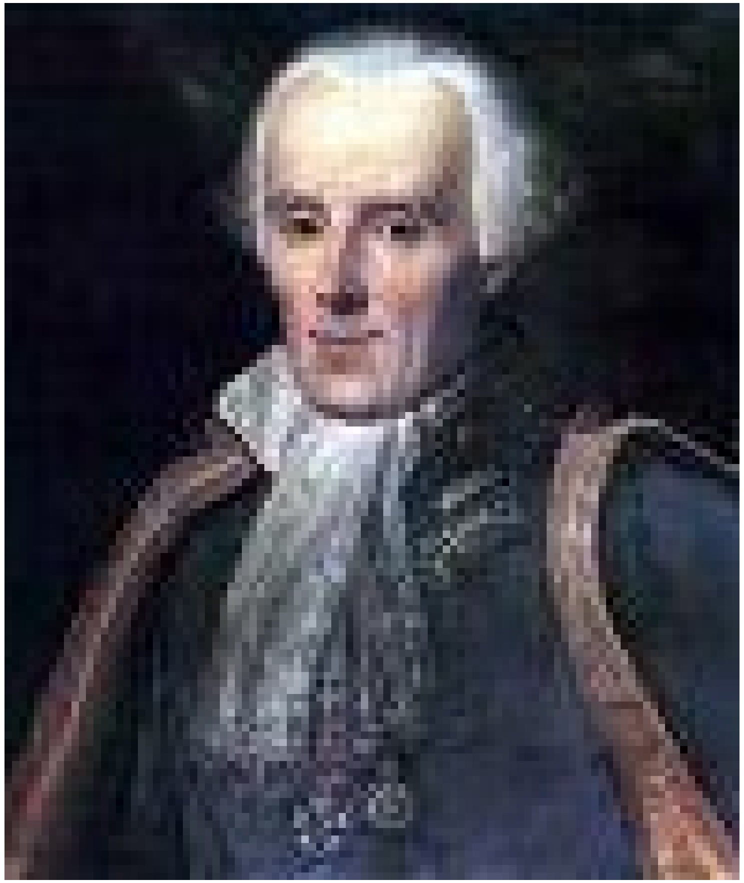


Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert

(1717 - 1783)

Lazare Nicolas Carnot

(1753 – 1823)



Pierre Simon de Laplace (1749 – 1827)

Augustin Cauchy (1789 – 1857)

Hermann Hankel (1839 – 1873)

Altri esempi in questo settore sono relativi a vari ostacoli epistemologici: il postulato di Archimede (Spagnolo, Margolinas); il concetto di numero immaginario (Bagni); lo “scivolamento” tra i verbi avere ed essere nel corso di una dimostrazione (Duval); l’inaccettazione della dimostrazione di un teorema che coinvolge l’infinito attuale ha come causa un’altra forma di “scivolamento” (tra aritmetica e geometria) (Arrigo, D'Amore); eccetera.

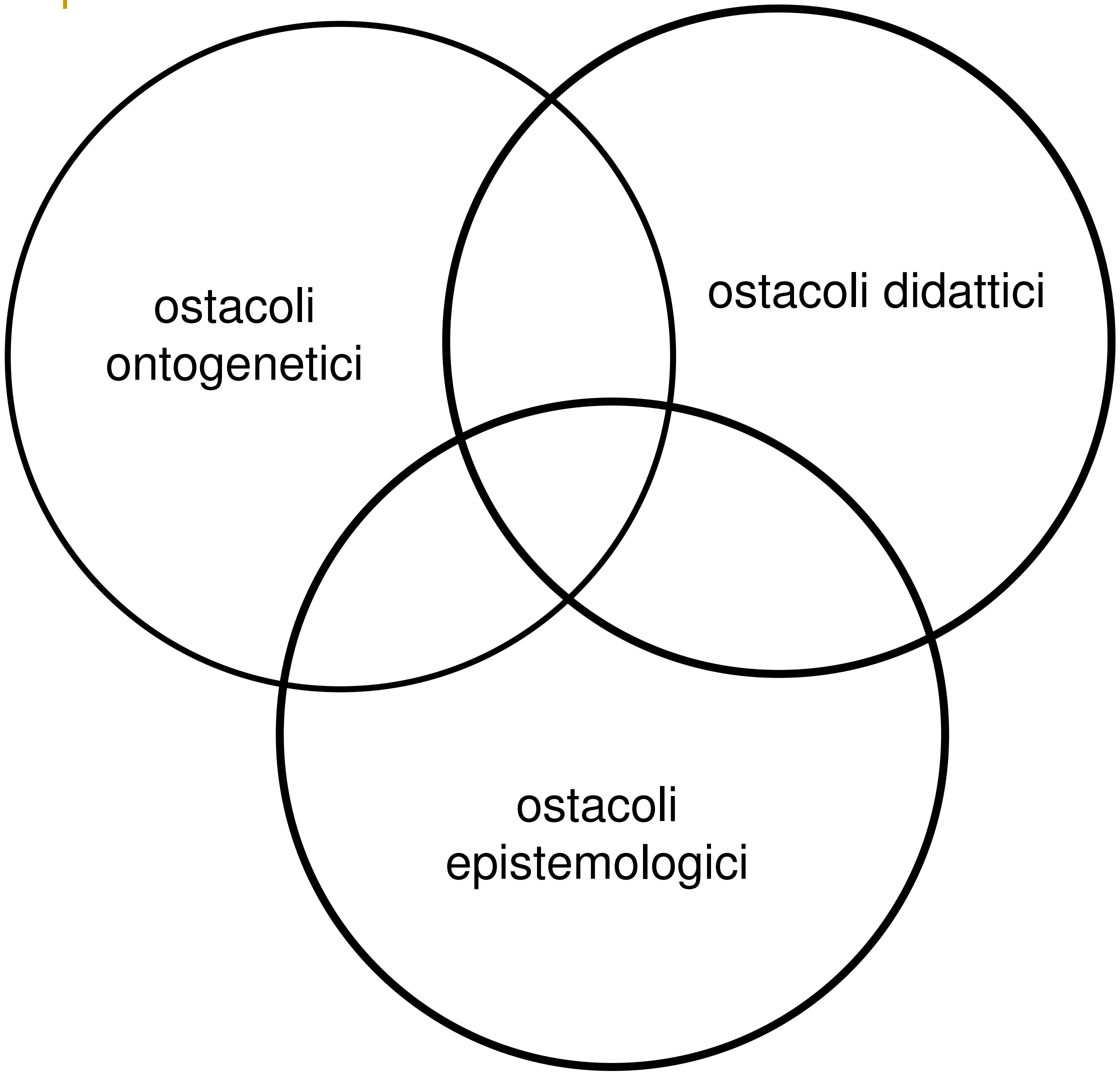
Riassumendo:

- l'ostacolo ontogenetico è legato allo studente ed alla sua natura (da tanti punti di vista) non solo in modo stabile, ma anche occasionale;
- quello didattico alla scelta strategica del docente;
- quello epistemologico alla natura stessa dell'argomento.

# 5. Qualche osservazione aggiuntiva

Si possono anche fare delle classificazioni meno "dettagliate": si può parlare di ostacoli genetici ed ontogenetici insieme e di ostacoli epigenetici, cioè legati alla comunicazione; in questa seconda categoria rientrano insieme gli ostacoli didattici ed epistemologici, in quanto frutto comunque di comunicazione. Anche questo punto contribuisce a spiegare l'enorme attenzione che in questi ultimi anni i ricercatori in didattica della matematica hanno riservato ai problemi della comunicazione.

Non è poi detto che le intersezioni reciproche tra tipologie di ostacoli siano vuote:




Riconoscere un ostacolo epistemologico fa scattare, a volte, condizionamenti didattici che finiscono con l'aggiungere a quelli epistemologici, appunto, ostacoli didattici.

Per esempio, che l'oggetto matematico "zero" sia un ostacolo epistemologico è piuttosto noto ed evidente; ciononostante, la ricerca ha mostrato che bambini fra i 3 ed i 6 anni arrivano a concettualizzarlo in maniera molto significativa. Tuttavia, spesso, l'insegnante, proprio perché riconosce in zero un ostacolo (epistemologico) lo tratta in maniera non idonea, creando oltre tutto un ostacolo didattico laddove non sarebbe necessario (D'Amore, Fandiño Pinilla).

Altro esempio; le frazioni costituiscono un ostacolo didattico notevole; poiché la presa in carico di esse da parte della comunità matematica sia avvenuto in tempi remoti (fin dall'Egitto del -2000 e forse prima), sembrerebbe non esservi cenno di ostacolo epistemologico; ma uno studio storico attento e critico mostra, invece, che non è così.

L'idea di frazione ha costituito momenti di rottura notevole e di forte crisi nell'evoluzione della storia della matematica (Fandiño Pinilla).

Ancora un esempio, tra i molti altri possibili; relazioni forzate tra i concetti di perimetro ed area di figure piane sono rintracciabili nella storia più antica, anche nel mito e nella leggenda; tanto da potersi dire che perimetro, area e reciproche relazioni costituiscono ostacoli epistemologici. Se si esaminano le convinzioni che gli insegnanti (di qualsiasi livello scolastico), hanno a questo proposito, si capisce subito perché tali oggetti matematici siano diffusamente trattati in modo tale da costituire anche ostacoli didattici (Fandiño Pinilla, D'Amore).

# 6. Ostacoli ed errori

Scriveva Giovanni Vailati (1863–1909) nel 1896 in: *Sull'importanza delle ricerche relative alla storia delle scienze* (Prolusione accademica del 1896):

«Un'asserzione erronea, un ragionamento inconcludente di uno scienziato dei tempi trascorsi possono essere tanto degni di considerazione quanto una scoperta o un'intuizione geniale, se essi servono ugualmente a gettar luce sulle cause che hanno accelerato o ritardato il progresso delle conoscenze umane».

È ormai opinione diffusa che l'idea di ostacolo nel suo senso epistemologico debba essere fatta risalire al lavoro già ricordato di Gaston Bachelard.

Gaston Bachelard (1884 – 1962)

Scrive infatti esplicitamente il filosofo francese nel 1938: «È in termini di ostacolo che bisogna porre il problema della conoscenza scientifica. E non si tratta di considerare gli ostacoli esterni, come la complessità e la fugacità dei fenomeni, né d'incriminare la debolezza dei sensi e dello spirito umano: è nell'atto stesso di conoscere, intimamente, che appaiono, per una sorta di necessità funzionale, delle lungaggini e degli scompigli. È là che noi mostreremo le cause di stagnazione e anche di regressione, è là che noi individueremo delle cause d'inerzia, che noi chiameremo Ostacoli Epistemologici».

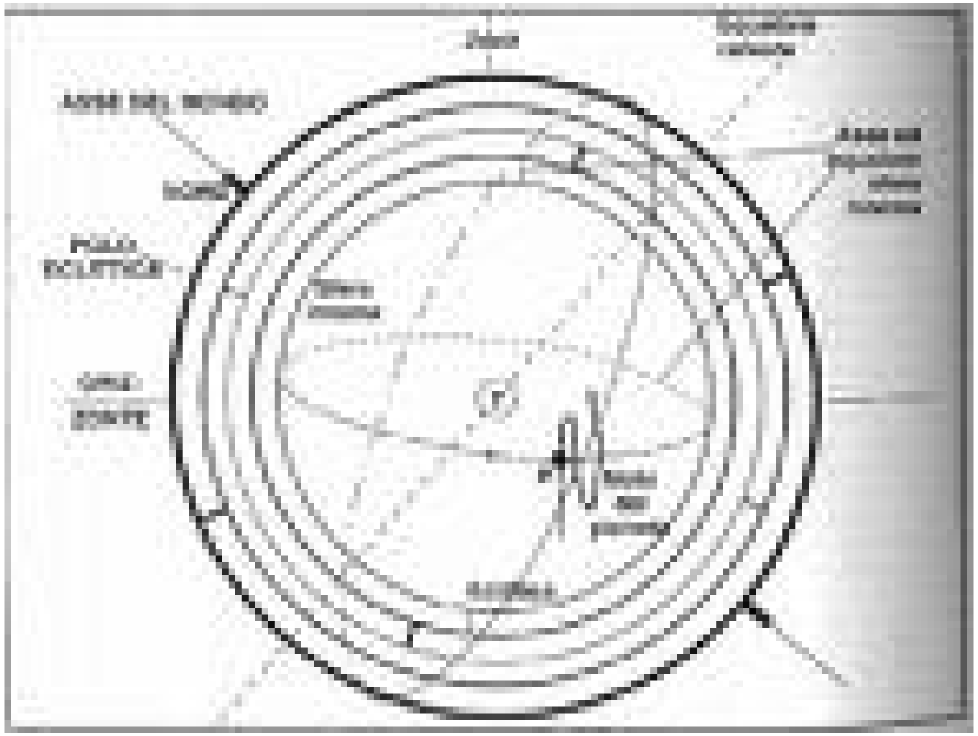
Ma, in un certo senso, cioè accettando una certa idea di "errore", si può prendere in esame anche la posizione di Federigo Enriques.

Federigo Enriques (1871 – 1946)

In un suo articolo, dal titolo: *L'errore in matematica*, egli fa una casistica degli errori più comuni in matematica; in questa casistica ha un posto di rilievo l'errore collegato con situazioni storiche, con credenze che vengono successivamente superate.

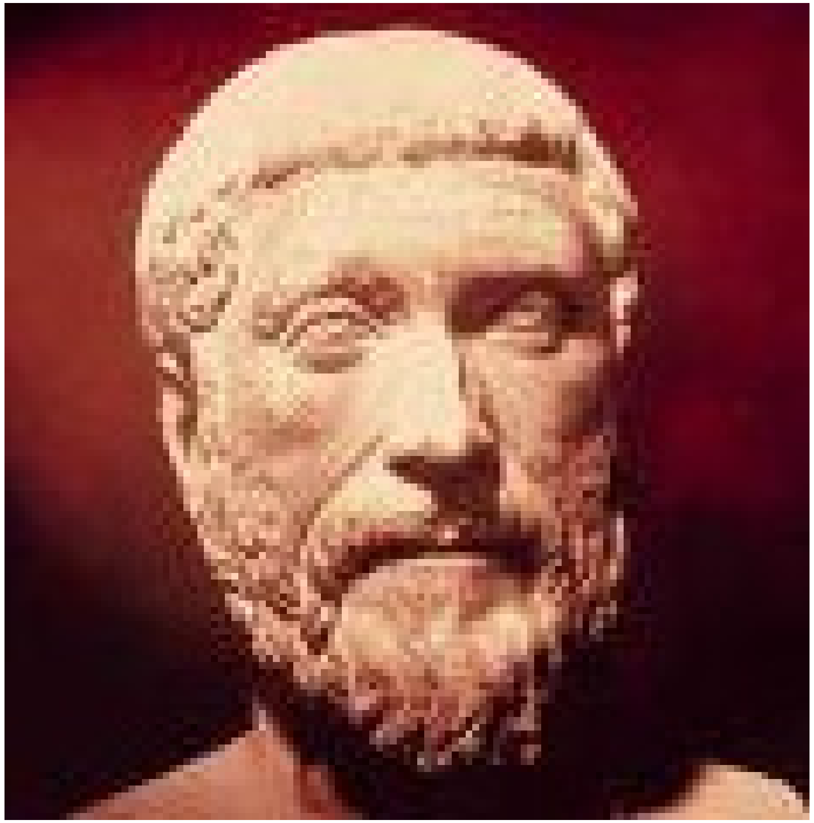
Ecco l’esempio che Enriques-Giovannini propone:

«Ai tempi di Eudosso di Cnido si poteva ricevere il teorema di Pitagora sui triangoli rettangoli, ritenendolo dimostrato mercè similitudine del triangolo ai due in cui esso viene diviso dall’altezza relativa all’ipotenusa. Siccome i teoremi sulla similitudine si fondavano allora sulla commensurabilità dei segmenti proporzionali, si aveva così una lacuna che lo stesso Eudosso ebbe a colmare costruendo la teoria dei rapporti irrazionali, mentre Euclide proponeva più tardi la sua nota dimostrazione del teorema di Pitagora, indipendente dal concetto di proporzione».




Il modello celeste di Eudosso da Cnido

(-409 c. – -356 c.)



Pitagora di Samo

(-572 circa - -490 circa)

Euclide di Alessandria

(-367 circa - -283 circa)

A parte la specificità dell’esempio, è di estremo interesse per noi la posizione secondo la quale l’errore, come scrive lo stesso Autore, «non appartiene né alla facoltà logica né all’intuizione, [ma] s’introduce nel momento delicato del loro raccordo».

L’errore, dunque, non è necessariamente frutto di ignoranza, ma potrebbe invece essere il risultato di una conoscenza precedente, una conoscenza che ha avuto successi, che ha prodotto risultati positivi, ma che non *tiene* alla prova di fatti più contingenti o più generali. Dunque non si tratta sempre di errori di origine sconosciuta, imprevedibili, ma di ostacoli nel senso di Bachelard.

Un esempio illuminante.
In terza primaria l’insegnante da poco affrontato l’algoritmo della sottrazione con il riporto o prestito. Per compiere una verifica generale, assegna alla classe l’effettuazione di 5 operazioni di sottrazione da eseguire in colonna:

68-24= 53-27= 45-22=
43-27= 79-66=

Uno studente esegue in colonna:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 68- | 53- | 45- | 43- | 79- |
| 24= | 27= | 22= | 27= | 66= |
| ____ | ____ | ____ | ___ | ____ |
| 44 | 34 | 23 | 24 | 13 |

Ad una prima occhiata frettolosa, l’insegnante si limita a dire all’allievo che ha fatto bene 3 volte su 5; poi aggiunge: «Devi stare più attento con i riporti»; ma nota lo sguardo del bambino che mostra di non capire questa indicazione. Una successiva analisi più fine, condotta anche coinvolgendo il bambino, mostra che la regola che questi aveva compreso ed applicato con successo nelle precedenti sottrazioni in colonna era: In una sottrazione in colonna parti sempre da destra, dalle unità, e sottrai il numero più piccolo dal più grande; poi passa alle decine e fai altrettanto.

Questa regola aveva funzionato bene fino ad allora e l'allievo aveva dunque optato per generalizzarla, evitando tutto quell'inutile discorso così complicato che non aveva fatto proprio relativo ai prestiti. Peccato che, questa regola, ben appresa, perfettamente funzionante, ora avesse smesso di funzionare…

L'errore non è dunque del tutto frutto di ignoranza ma, anzi, al contrario, è il tentativo di generalizzare e protrarre una conoscenza che aveva funzionato, a tutti i casi nuovi.

Da questo punto di vista, una raccolta di possibili errori matematici potrebbe avere grande interesse [ovviamente non si prendono in esame gli errori di scarso interesse epistemologico, come l'errore involontario, il refuso, l'errore di distrazione, l'applicazione di regole inesistenti (che sono comunque un interessante segnale di misconcezioni) eccetera]..

È importante notare che, mentre per Bachelard l'ostacolo epistemologico ha sede nel pensiero stesso, per Brousseau esso risiede nella comunicazione. Visti gli esempi fatti fino ad ora, vogliamo ancora notare quanto sia efficace associare la ricerca sugli ostacoli epistemologici ad una competenza nella storia del pensiero matematico.

In Douroux si trova anche un elenco di condizioni cui devono soddisfare gli ostacoli per poter essere detti epistemologici, che è sostanzialmente quella precedente; inoltre, sempre nell'àmbito del gruppo di ricerca di Bordeaux, si sono messe a punto caratteristiche per poter individuare un ostacolo che sono, in breve, le seguenti:

- si ha un ostacolo quando nell'analisi storica di un'idea, si riconosce una frattura, un passaggio brusco, una non-continuità nell'evoluzione storico - critica dell'idea stessa;
- si ha un ostacolo quando uno stesso errore si verifica come ricorrente più o meno negli stessi termini.

La ricerca degli ostacoli va allora fatta contemporaneamente, e questo legame ha del sensazionale perché dà al ruolo della prassi didattica lo stesso peso, la stesa fondamentale importanza che ha la ricerca storico-epistemologico-critica in matematica:

- a scuola, nella pratica didattica;
- nello studio della storia della matematica,

coniugando l’una ricerca con l’altra.

# 7. Ruolo della storia nella prassi scolastica e studente come costruttore di nuova conoscenza

Le ultime osservazioni del precedente paragrafo costituiscono un validissimo motivo per l'introduzione esplicita della storia della matematica nelle aule scolastiche.

A parte altri vantaggi da noi già riscontrati nell’àmbito della didattica in senso A (aumento di motivazione e di interesse, di attenzione e di curiosità; miglioramento generale dell’immagine che ha la matematica presso gli studenti; miglioramento nella partecipazione attiva alla vita cognitiva in aula durante le ore di matematica), mettere l’allievo di fronte a queste fratture, a queste discontinuità, per mostrare situazioni erronee nelle quali i matematici si nono venuti a trovare, è un modo per aiutare a capire il senso che ha l’errore in matematica, dare confidenza con l’idea che la matematica sia ben più che non una raccolta di regole stantìe ed insensate (D’Amore, Speranza).

Naturalmente: tutto deve essere perfettamente commisurato all'età ed alla cultura del discente, il che è forse la cosa più complessa che richiede attenzioni estreme sulla trasposizione didattica e competenze eccellenti da parte del docente (Bagni; Barbin et al.; sulla componente epistemologica necessaria nella formazione docente, si può vedere D'Amore).

Molta della nostra attività di ricerca e di aggiornamento presso gli insegnanti è stata dedicata per decenni a questo tema. Per evitare un fraintendimento, vogliamo dire esplicitamente che, per motivi diversi, può essere un bene non limitarsi alla sola storia della matematica, intesa come rigorosa analisi critica e tecnica, ma anche concedere qualche cosa ad un'analisi con pretese critiche minori e, perché no?, qualche volta anche all'aneddotica.

Senza per questo confondere storia con aneddotica, si deve ammettere che lo strumento poco sofisticato e poco scientifico (senza per questo cadere in banalità, ovviamente, che potrebbero addirittura essere controproducenti), ha avuto sempre grande successo nell'attirare l'attenzione e nello spezzare ritmi troppo intensi. E ciò vale in ogni ordine di scuola, perfino all'università e perfino in corsi per insegnanti o post-laurea.

Si possono fare, su questo legame didattica-storia, considerazioni ad alto livello, per esempio ricordando e cercando di spiegare il fatto che numerosi lavori di illustri matematici, oggi considerati pietre miliari nella storia della matematica, siano invece stati scritti come libri a carattere didattico, a volte come libri di testo per studenti, a volte come lavori divulgativi. Oppure ricordando come studi matematici che hanno avuto fortuna in un campo, erano in realtà destinati ad un altro. O come libri o articoli scritti con un obiettivo, ne abbiano raggiunto un altro (a volte anche opposto). Eccetera.

Per ciascuna di queste affermazioni, abbiamo ben presenti svariati esempi molto significativi che spesso usiamo con studenti ed insegnanti.
Naturalmente, molta distanza c'è tra queste intuizioni, anche se suffragate dall'esperienza, ed una vera e propria ricerca didattica; quel che volevamo fare qui era solo spezzare ancora una volta una lancia a favore del connubio storia - didattica, da tanti punti di vista ed a livelli diversi.

Da questo connubio non deve essere assente l'epistemologia. Come afferma Michèle Artigue:

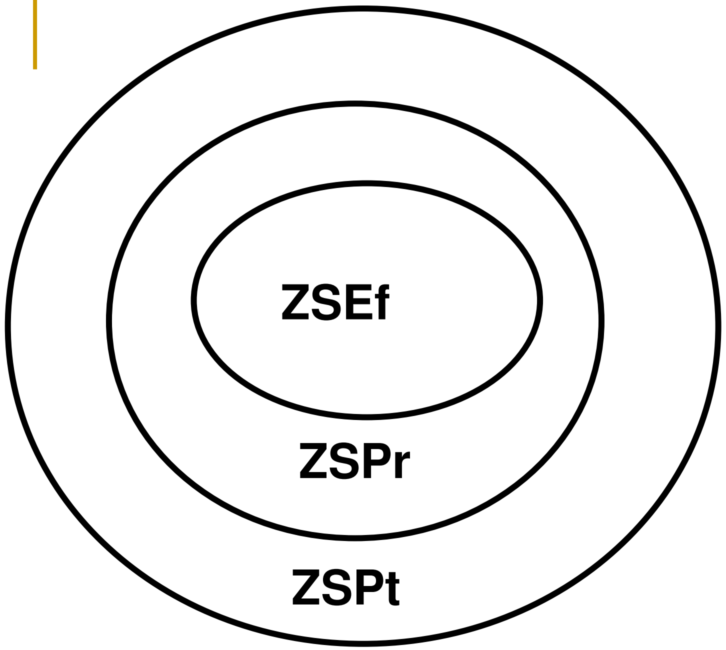
«L'epistemologia aiuta il didatta a controllare le relazioni con il sapere matematico degli oggetti che egli manipola. Gli permette anche di riguardare da un punto di vista esterno il sistema d'insegnamento che egli studia ed al quale è spesso quasi troppo vicino. Ma mettendo in evidenza la distanza che separa la genesi storica delle nozioni e le genesi artificiali costruite per i bisogni dell'insegnante, gli mostra anche tutto ciò che separa questi due campi: l'epistemologia e la didattica».

Certo, il discorso sugli ostacoli porta immediatamente a parlare delle concezioni che hanno gli allievi e, ovviamente, delle concezioni che hanno gli insegnanti; vari studi sono stati fatti per collegare questi due punti in una sorta di implicazione ... In questo senso, cioè vòlto al collegamento tra concezioni che hanno gli allievi, in relazione a concezioni che hanno gli insegnanti, celebre è l’esempio di El Bouazzaoni che tratta della nozione di continuità di una funzione, al quale rinviamo.

# 8. Lo studente come ricercatore

Non sarà inutile sottolineare, che, sulla base di quanto fin qui affermato, non si scorge nessuna rilevante differenza tra

- il lavoro dello scienziato che, basandosi sulle proprie conoscenze, avanza sulla strada della scienza, percorrendo nuove vie e dunque, fatalmente, commettendo degli errori che si riveleranno poi produttivi nella conquista del sapere;




ZSEf: zona di sviluppo effettivo
ZSPr: zona di sviluppo prossimale
ZSPt: zona di sviluppo potenziale

- il lavoro dello studente che, basandosi sulle proprie conoscenze, nella zona di sviluppo effettivo, avanza nella strada della conoscenza, nella zona di sviluppo prossimale e dunque, fatalmente, commettendo quegli errori attesi dal docente, quelli correggendo i quali, si creeranno immagini più potenti del concetto in gioco, verso la creazione di un modello corretto, stabile, seguendo la terminologia di Vygotskij.

Lev Semyonovich Vygotskij

(1896 – 1934)

Spesso si dice che l'errore non va considerato come qualche cosa di necessariamente negativo, ma poi non si sa come interpretare questa frase.

A noi pare che, nell'accezione qui presentata, si restituisca significato ad una frase che, altrimenti, sembra vuota e sterile.

D’Amore B. (1997). *Problemas. Pedagogía y Psicología de la Matemática en la actividad de resolución de problemas*. Prefacio de **Gérard Vergnaud**. Madrid: Editorial Sintesis.

D’Amore B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Prefacios de **Guy Brousseau** y de **Ricardo Cantoral**. México DF, Barcelona: Reverté-Relime.

D’Amore B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Prefacios de **Colette Laborde**, **Guy Brousseau**, **Luis Rico**. Bogotá: Editorial Magisterio.

Bagni G.T., D’Amore B. (2007). *Leonardo y la Matemática*. Bogotá: Magisterio.

Fandiño Pinilla M.I. (2006). *Currículo, evaluación y formación docente en matemática*. Prefacio de **Salvador Llinares**. Bogotá: Magisterio.

Fandiño Pinilla M.I. (2009). *Fracciones, aspectos conceptuales y didáctico*. Prefacios de Athanasios Gagatsis e di **Carlos E. Vasco**. Bogotá: Magisterio.

Fandiño Pinilla M.I., D’Amore B. (2009). *Área y perímetro, aspectos conceptuales y didáctico*. Bogotá: Magisterio. En curso.

Los articulos se pueden descargar gratuitamente del sito: **www.dm.unibo.it/rsddm**